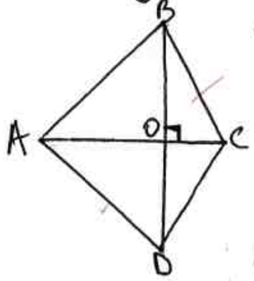
ЗАДАНИЕ № 1 (максимальное количество баллов – 7)

~~Известно, что~~ Для того, чтобы диагонали выпуклого четырёхугольника пересекались под прямым углом, суммы противолежащих сторон попарно должны быть равны

Доказательство:



• Пусть ABCD – некоторый выпуклый прямоугольник, у которого диагонали AC и BD перпендикулярны.

По теореме Пифагора мы можем найти квадрат от каждой из гипотенуз AB, BC, CD, AD.

$$\left.\begin{aligned} AB^2&=AO^2+OB^2\\ BC^2&=BO^2+OC^2\\ CD^2&=CO^2+OD^2\\ AD^2&=AO^2+OD^2\end{aligned}\right\} \begin{aligned} AB^2+CD^2&=AO^2+OB^2+CO^2+OD^2\\ BC^2+AD^2&=AO^2+OB^2+CO^2+OD^2\end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2+CD^2=BC^2+AD^2 \Rightarrow AB+CD=BC+AD,$$ ч.т.д.

Зная эту теорему, можно проверить утверждение Пети

$103+107=210$

$105+104=209$

$210 \neq 209 \Rightarrow$ Петя не прав.

Ответ: нет, Петя не прав.

7б.

ШИФР УЧАСТНИКА М-9-1

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 1

Набранные баллы 7б

Подписи членов жюри

ШИФР УЧАСТНИКА М-9-1

ЗАДАНИЕ №2 (максимальное количество баллов – 7)

$x^4+x^3+x^2+x+1$

$x(x^3+1)+x^2(x+1)+1$

$x(x+1)(x^2-x+1)+x^2(x+1)+1$

$(x+1)(x(x^2-x+1)+x^2)+1$

$(x+1)(x^3-x^2+x+x^2)+1$

$(x+1)(x^3+x)+1$

$(x+1)\cdot x(x^2+1)+1$

ШИФР УЧАСТНИКА М-9-1

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 2

Набранные баллы 0б Подписи членов жюри

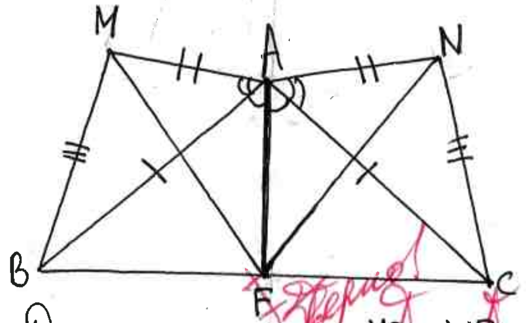
ШИФР УЧАСТНИКА М-9-1

ЗАДАНИЕ №3 (максимальное количество баллов – 7)

Дано:
ΔABC – р/б
AB и AC – бок.ст.
ΔAMB = ΔANC
AM = AN
AF - бисс ∠BAC

Доказать:
т.M и т.N симметр. относ. бисс AF.

Доказательство:



1. Достроим отрезки MF и NF.
2. Т.к. ΔAMB = ΔANC, то ∠BAM = ∠CAN.
3. ∡ ΔMAF и ΔFAN
   1. MA = AN - по усл.
   2. AF - общ. ст.
   3. ∠MAB + ∠BAF = ∠FAC + ∠CAN => ∠MAF = ∠FAN.

   } ΔMAF = ΔFAN по 2 сторонам и ∠ между ними (I признак).
4. Т.к. в равных Δ соотв. элементы равны, то MF = FN.
5. Т.к. AF - бисс. в р/б, опущенная из вершины, то AF - бисс, выс. и мед., а т.к. MF = FN (см. пункт 4), то AF - серединный перпендикуляр для т.N и т.M => по свойству серед. перп. т.M и т.N всегда равноудалены от AF => т. N и т. M симметричны относительно биссектрисы AF, ч.т.д.

т. Ф исправлена ошибочно!

ШИФР УЧАСТНИКА М-9-1

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 3

Набранные баллы 35 Подписи членов жюри

ШИФР УЧАСТНИКА М-9-1

ЗАДАНИЕ №4 (максимальное количество баллов – 7)

○ Для того, чтобы произведение натуральных чисел от 2 до $(n-5)$ делилось на n, в ряду чисел, при разложении которого на простые множители, должны быть все множители числа n. n - простое число не подходит, так как делится только на 1 и на себя. Рассмотрим два варианта.

При n - чётное число, данная формула работает тогда, когда из числа n вычитает 5, и полученный результат $\geq \frac{1}{2}n$, так как наибольшим делителем чётного числа не равным самому числу, может являться половина этого числа. Наименьшим из таких чисел будет

$n-5=\frac{1}{2}n$

$n-\frac{1}{2}n=5$

$\frac{1}{2}n=5$

$n=10$

При увеличении чётного числа n, число $n-5$ будет составлять всё большую часть от числа $n \Rightarrow$ все чётные числа ≥ 10 соответствуют n.

У составных нечётных чисел наибольший делитель, не считая самого числа, максимально может составлять $\frac{1}{3}$ от исходного числа n, т.к. 3 - первое в ряду нечётное число, которое может являться одним из делителей не простых чисел. Следовательно, наибольший из делителей числа $n-5$, где n - нечётное число должен быть $\leq \frac{1}{3}n$.

При $n=9$, $9-5=4$ $(>\frac{1}{3}$ от $n)$.
Следующее число (составное) $n=15$. $15-5=10=2\cdot5$, где $5\leq\frac{1}{3}n$. При увеличении нечётного числа n, число $n-5$ будет составлять так же часть $\leq\frac{1}{3}n \Rightarrow$ все составные нечётные числа >9 соответствуют n.

Т.к. первое подходящее число $=10$, то для любого натурального числа $n>9$ и не простого произведение натуральных чисел от 2 до $(n-5)$ включительно делится нацело на n, ч.т.д. •

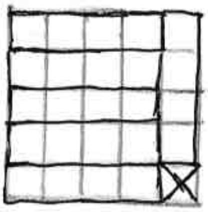
ШИФР УЧАСТНИКА М-9-1

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 4

Набранные баллы 7б Подписи членов жюри

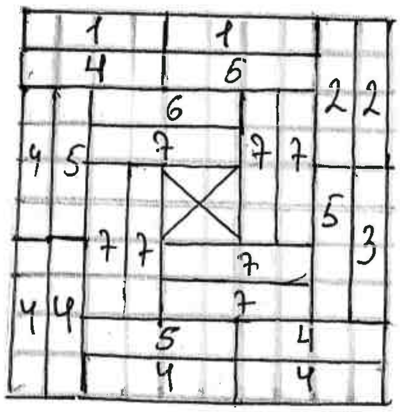
ЗАДАНИЕ №5 (максимальное количество баллов – 7)

Разделим квадрат 10×10 на 4 квадрата 5×5 и попробуем разместить в одном таком квадрате как можно больше прямоугольников 4×1. $S_{\square}=5\cdot5=25$ ед^2, а $S_{\square}=4\cdot1=4$ ед^2. $25:4=6$ (ост. 1) $\Rightarrow$ в квадрат 5×5 мы сможем поместить максимально 6 прямоугольников 4×1.



Если составить из 4 таких квадратов 5×5 снова квадрат 10×10, то, даже если квадратик 1×1, не вошедший в прямоугольники, будет с краю, то из 4 таких квадратиков 1×1 прямоугольник 4×1 никак не образуется. В таком случае, при нахождении прямоугольников 4×1 строго в четырёх квадратах 5×5, всего образуются $6\cdot4=24$ прямоугольника.

Теперь рассмотрим вариант, в котором прямоугольники 4×1 выходят за рамки квадратов 5×5. Попробуем оптимально разместить все прямоугольники в квадрате 10×10. Каждая цифра прямоугольника будет соответствовать шагу заполнения.



1. Построим 2 прям. 4×1 с краю в одном ряду.
2. В оставшиеся 2 клетки можно построить только 2 прямоугольника, иначе они останутся.
3. Достроим один прямоуг. 4×1 под крайним прямоуг. из пункта 2.
4. Снова остаются 2 клетки. По этой же схеме достраиваем всё по кругу, включая последний прямоугольник под самым первым прямоугольником.
5. Для того, чтобы осталась удобная фигура и не осталось пустых клеток с краю, достроим 4 прямоугольника в каждом из предпоследних рядов.
6. Построим прямоуг. с краю оставшегося квадрата 6×6.
7. Остаются 2 клетки, куда мы так же вписываем прямоугольники по причине пункта 2. После чего остаются ещё 2 клетки, и мы повторяем действия, пока в центре у нас не останется квадрат из 4 клеток.

Следовательно, мы смогли вместить ~~10·10~~ 4 прямоугольники в $10\cdot10-4=100-4=96$ клеток

$96:4=24$ прямоугольника 4×1 – наибольшее число.

Ответ: наибольшее число – 24 прямоугольника 4×1.

ШИФР УЧАСТНИКА М-9-1

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 5

Набранные баллы 7б **Подписи членов жюри**